

CLIMAT, ÉPIDÉMIE,
QUANTIQUE, LANGAGE,
ROBOTIQUE...

ET SI LA THÉORIE
DES CATÉGORIES
ÉTAIT UNE
THÉORIE
DU TOUT

PAR CLÉMENTINE LAURENS

ien des mathématiciens et mathématiciennes en parlent en des termes réservés, voire critiques. «*Quand la théorie des catégories a été développée, certains allaient jusqu'à dire qu'un tel niveau d'abstraction était une absurdité*», rappelle David Spivak, à l'institut Topos, aux États-Unis. C'est donc d'autant plus frappant de voir qu'elle se trouve aujourd'hui mobilisée pour des problèmes très concrets de physique, mais aussi de robotique, de linguistique, d'épidémiologie... La «*théorie des catégories appliquée*» devient un oxymore en plein essor – une revue scientifique lui est maintenant consacrée et la 9^e conférence annuelle sur le sujet aura lieu en juillet, en Estonie. «*En mathématiques, même quand on essaie activement de faire des choses ultra-déconnectées du monde réel, quelqu'un finit toujours par trouver des applications*», sourit l'informaticienne Jade Master, qui exploite ces objets pour modéliser la propagation des maladies.

Les catégories? John Baez, chercheur à l'université d'Édimbourg, le reconnaît: «*Dans ce champ des mathématiques, les définitions peuvent à première vue sembler mystérieuses.*» Le principe, lui, est relativement simple: une catégorie, c'est juste un ensemble d'objets, reliés entre eux par des flèches. Peu importe la nature des objets, la théorie des catégories se concentre sur la dynamique décrite par les flèches. Et c'est ce qui lui permet de relier des catégories apparemment très différentes, à condition qu'elles partagent la même dynamique.

REPRÉSENTER LA RÉALITÉ

À l'origine, la théorie a été développée dans les années 1940 pour permettre de déployer rigoureusement des transferts d'idées entre, notamment, la topologie, science des formes, et l'algèbre, science des structures. «*Repérer des similarités dans des domaines différents des mathématiques, c'est naturel. Cela fait des siècles qu'on exploite des analogies et qu'on transpose des idées. Mais avant les années 1940, on n'avait jamais imaginé que ces manières d'aller d'un domaine à un autre pouvaient elles-mêmes constituer des objets mathématiques!*», souligne la mathématicienne Valeria de Paiva, à l'institut Topos.

La force de cette théorie, c'est qu'elle permet de composer ses flèches de façon cohérente, de les combiner pour décrire des

processus qui se déroulent de façon séquentielle ou en parallèle. Pas si étonnant, donc, qu'elle ait été rapidement exploitée dans les travaux sur les fondements des mathématiques – une activité qui consiste à dérouler des arguments – et en informatique – ainsi est né, par exemple, le langage de programmation Haskell, encore utilisé aujourd'hui. La linguistique aussi s'est révélée un riche terrain de jeu pour les catégoristes. Mais les applications vont bien au-delà. «*En sciences, un très grand nombre de notions et de systèmes peuvent s'écrire comme une série d'instructions à réaliser les unes après les autres ou simultanément. Une recette de cuisine, c'est exactement ça! Les catégories sont donc une représentation naturelle de la réalité*», appuie le physicien Bob Coecke, à l'université d'Oxford, qui a proposé une refondation de toute la mécanique quantique sur ce formalisme, devenu par la suite un langage clé des technologies d'informatique quantique. «*Les catégories sont un excellent substitut à la logique pour structurer un raisonnement scientifique*, approuve David Spivak. *La logique, c'est lent, c'est laborieux. Quand j'ai découvert la théorie des catégories, j'étais émerveillé par sa concision: on peut représenter une si grande quantité d'informations en si peu d'espace! C'est "juste un langage", oui, mais c'est précisément parce que c'est un langage pertinent et extrêmement concis qu'il est un support inestimable pour la pensée.*»

Récemment, les applications ont pris une autre dimension, plus pratique. La preuve: →



UN LANGAGE ABSTRAIT QUI COMMENCE À TROUVER DES APPLICATIONS CONCRÈTES

EN MÉCANIQUE QUANTIQUE

Au début des années 2000, le physicien Bob Coecke et l'informaticien Samson Abramsky développent une refondation de la mécanique quantique basée sur la théorie des catégories. « Dans ce langage très abstrait, on parvient à faire émerger des principes premiers, et à reconstruire des propriétés comme la téléportation quantique, explique Bob Coecke. Des choses qui étaient extrêmement difficiles dans le formalisme habituel deviennent faciles grâce aux catégories. » Cette réécriture a permis de développer un langage graphique particulièrement intuitif, le ZX-Calculus, qui joue aujourd'hui encore un rôle clé dans le développement de l'informatique quantique.

la théorie commence même à investir l'épidémiologie! « Quand le Covid a frappé le Canada, je travaillais pour les autorités de santé publique sur la modélisation et la gestion de l'épidémie, se souvient Nathaniel Osgood, de l'université de la Saskatchewan, au Canada. Et j'ai douloureusement constaté combien nos outils étaient sous-performants par rapport à ce qu'aurait offert le formalisme des catégories. Celles-ci sont tellement adaptées à ce genre de situations où il faut sans cesse mettre à jour les modèles, agréger des données, inclure de nouveaux paramètres... » D'autres travaillent sur des projets en biologie, en robotique, en sciences des matériaux... et même en musique: Bob Coecke développe un outil pour « générer de la "musique catégorique" avec un ordinateur quantique »... Tout un programme! David Spivak se réjouit de ce foisonnement: « J'ai toujours pensé que les maths devaient pouvoir nous aider à expliquer la réalité. »

Et en climatologie? La théorie des catégories semble être un outil de choix pour représenter le fonctionnement d'un système aussi complexe, constitué de nombreuses parties interdépendantes. « Certains théoriciens des catégories aimeraient bien s'y frotter, mais pour ma part je n'ai pas encore rencontré de climatologues

EN LINGUISTIQUE

« C'est de la grammaire ! », s'est exclamé le mathématicien Joachim Lambek en découvrant l'application de la théorie des catégories à la téléportation quantique. Il avait préalablement – et indépendamment – exploité les catégories en linguistique pour relier la structure d'une phrase à son caractère grammaticalement correct. « Or, la catégorie qu'il utilisait pour cela était exactement la même que la nôtre en mécanique quantique ! », raconte Bob Coecke, qui a ensuite développé avec d'autres « DisCoCat », un cadre mathématique qui relie la structure et le sens du langage. « Cela donne une représentation très naturelle qui combine grammaire et sens », assure le théoricien.

désireux de se lancer », note John Baez. « À ma connaissance, cette théorie n'est pas exploitée par mes collègues », confirme Freddy Bouchet, directeur du Laboratoire de météorologie dynamique, à Paris.

UN PEU RÉBARBATIF

Car il y a un obstacle, une difficulté classique dans les champs interdisciplinaires, qui est ici singulièrement accrue: le coût d'entrée – élevé – dans ce nouveau formalisme rebute bon nombre de scientifiques. « La théorie des catégories, ce sont des mathématiques sophistiquées qui nécessitent un temps et un effort d'apprentissage », reconnaît Valeria de Paiva. Au début, les progrès sont lents, ce qui, en l'absence de garantie de résultat, peut être un frein. « J'ai indirectement découvert les catégories dans les années 1980, pendant un cours sur les fondements des langages de programmation, et j'ai tout de suite été fasciné, se souvient Nathaniel Osgood. J'avais l'intuition profonde que cela pouvait m'être utile, mais je n'étais pas sûr que l'effort nécessaire pour s'y mettre vraiment en valait la peine. Il m'a fallu plus de trente ans pour finalement me pencher

EN ROBOTIQUE

Concevoir un robot nécessite d'agrèger un grand nombre de décisions sur le choix de l'algorithme, la conception physique du robot, la prise en compte de contraintes éthiques ou légales... « *Quand j'ai commencé dans le domaine, je pensais qu'aucun langage ne permettait de prendre tout cela en compte de manière unifiée*, raconte Gioele Zardini, roboticien au MIT. *Et puis j'ai découvert les catégories. Pour chaque problème, on utilise des représentations sous forme de boîtes, et le formalisme catégorique permet de les combiner. C'est très simple, mais très puissant, ce langage universel !* »

EN ÉPIDÉMIOLOGIE

Comment se propage une maladie selon la population touchée, les capacités des hôpitaux, l'arrivée potentielle de vaccins, de variants ? « *Traditionnellement, on modélise cela avec du code informatique classique, mais il peut alors être difficile de changer quelque chose a posteriori, et encore plus de combiner entre eux deux modèles représentant différents aspects du problème* », explique le mathématicien John Baez, pionnier de l'approche catégorique. Jade Master, du laboratoire Coherence Research Limited, témoigne elle aussi de la puissance de ce langage : « *À l'aide des catégories, je modélise la propagation d'une épidémie dans le réseau de métro de Glasgow. Et j'observe la propagation en fonction des fermetures de stations qui peuvent être décidées.* »

dessus, et découvrir tout le potentiel qu'a cette théorie pour l'épidémiologie. »

D'où l'importance de valoriser les accomplissements d'ores et déjà permis par les catégories, exhorte le roboticien Gioele Zardini, au MIT : « *Le discours consistant simplement à dire : "Regardez, cette catégorie décrit remarquablement bien votre problème" ne convaincra jamais un ingénieur. Pour faire adopter un nouvel outil, il faut montrer que cette nouvelle description est une clé vers la résolution du problème.* » Bob Coecke insiste : « *Pour pouvoir parler de "théorie des catégories appliquée", moi, je veux qu'il y ait un po-*



tentiel d'applications industrielles – et c'est le cas en informatique quantique ! » Jade Master, elle, tempère : « *En ce moment, il y a pas mal de sensationnalisme autour de la théorie des catégories appliquée, mais il faut rappeler que ce n'est pas non plus une formule magique. Cela aide à organiser les informations, dévoiler les structures, clarifier les idées... C'est puissant, mais ça ne permettra pas non plus de répondre à toutes les questions.* »

Reste que l'une des plus fascinantes applications n'est peut-être pas pratique... mais philosophique. Car un nouveau langage offre toujours une nouvelle perspective. « *Les catégories invitent à penser le monde en termes de ce qui "advient" plutôt que ce qui "est"* », résume Bob Coecke. De quoi raviver un vieux débat qui remonte à l'Antiquité, entre d'une part Parménide, défenseur d'une réalité statique et d'une vision réductionniste, dans laquelle les choses ne se comprennent qu'en dévoilant leurs constituants élémentaires; et d'autre part Héraclite, pour qui le monde n'est que processus, où rien ne demeure, tout se meut, tout est éternellement en devenir. « *La théorie des catégories nous apprend à oublier le réductionnisme et à embrasser pleinement le relationnisme, comme le promouvait Leibniz* », analyse Bob Coecke. Après des siècles d'une science dominée par la vision de Parménide, et si c'était l'heure de la revanche d'Héraclite ?

NOS SOURCES

John Baez et al., *arXiv* (2023); John Baez et al., *AMS* (2022); Tai-Danae Bradley, *arXiv* (2018); Brendan Fong et al., *arXiv* (2018). Retrouvez toutes nos sources sur epsilonon.com/sources. Toutes les citations sont extraites d'interviews réalisées par *Epsilonon*.