Bollettino U. M. I.
(4) **11** (1975), 66-75

Categorie normate.

RENATO BETTI - MASSIMO GALUZZI (Milano) (*)

Summary. - *In this paper we give the notation of normed category as based on a suitable closed category* $\mathcal{S}(\boldsymbol{R})$, *and we show the existence of a closed functor inducing the metric* ($\boldsymbol{R}$*-based category*) *by the normed structure. Generalisations are given.*

Introduzione.

Intenderemo con il termine « *categora chiusa* » una categoria $\mathcal{U}$ che sia bicompleta e dotata di struttura monoidale simmetrica chiusa. Vale a dire dotata di un bifuntore $\otimes\colon \mathcal{U}\times\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ e degli isomorfismi coerenti $u\otimes v\simeq v\otimes u$ di simmetria e $u\otimes(v\otimes w)\simeq$ $\simeq(u\otimes v)\otimes w$ di associatività, di un oggetto k unitario per il bifuntore $\otimes$, nel senso che sono assegnati gli isomorfismi coerenti $k\otimes u\simeq u\simeq u\otimes k$, dotata inoltre di un bifuntore $\hom\colon \mathcal{U}^{op}\times\mathcal{U}\to$ $\to\mathcal{U}$, in modo tale che per ogni oggetto di $\mathcal{U}$ si abbia l'aggiunzione

$$u\otimes(\ )\dashv \hom(u, -)\,.$$

In [2] è contenuta una esposizione completa del concetto di categoria chiusa e delle sue implicazioni. Chi volesse seguirne lo sviluppo storico può comunque consultare [3], [4], [5], [6].

Un esempio importante di categoria chiusa (cfr. [1]) è $\boldsymbol{R}$, l'insieme dei numeri reali positivi (compreso ∞), con $a\to b$ se e solo se $a\geqq b$ e nella quale $a\otimes b=a+b$ e

$$\hom(a, b)=\begin{cases} b-a & \text{se } b\geqq a\\ 0 & \text{se } b<a\,.\end{cases}$$

Data una categoria chiusa $\mathcal{U}$, diremo categoria $\mathcal{U}$-basata il dato di un insieme X di oggetti $a, b, c\ldots$ con un oggetto $X(a, b)$ di $\mathcal{U}$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.

per ogni coppia ordinata $\langle a, b\rangle$ di oggetti di X, un morfismo $X(a,b)\otimes X(b,c)\xrightarrow{\mu_{abc}} X(a,c)$ per ogni terna ordinata $\langle a, b, c\rangle$ di oggetti di X, un morfismo $k\xrightarrow{\eta_a} X(a,a)$ per ogni oggetto a di X, in modo tale che i seguenti diagrammi in $\mathfrak{U}$ commutino

$$\begin{tikzcd}
X(a,b)\otimes\big(X(b,c)\otimes X(c,d)\big) \arrow[r, "X(a,b)\otimes\mu_{bcd}"'] \arrow[d, "\mathfrak{U}\text{-assoc.}"', "\cong"] & X(a,b)\otimes X(b,d) \arrow[dd, "\mu_{abd}"] \\
\big(X(a,b)\otimes X(b,c)\big)\otimes X(c,d) \arrow[d, "\mu_{abc}\otimes X(c,d)"'] & \\
X(a,c)\otimes X(c,d) \arrow[r, "\mu_{acd}"'] & X(a,d)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X(a,b) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[ddrr] & K\otimes X(a,b) \arrow[r, "\eta_a\otimes X(a,b)"'] & X(a,a)\otimes X(a,b) \arrow[dd, "\mu_{aab}"] \\
X(a,b)\otimes k \arrow[d, "X(a,b)\otimes\eta_b"] & & \\
X(a,b)\otimes X(b,b) \arrow[rr, "\mu_{abb}"] & & X(a,b)
\end{tikzcd}$$

Se X è una categoria $\boldsymbol{R}$-basata, allora X è uno spazio metrico con distanza fra a e b assegnata da $X(a,b)$, non simmetrica e tale che $X(a,b)=0$ non implica $a=b$.

Infatti in questo caso i morfismi canonici μ_{abc} e η_a diventano

$$X(a,b)+X(b,c)\geqq X(a,c)$$

$$0\geqq X(a,a)\,.$$

È facile trovare le condizioni di tipo categoriale per ottenere una distanza simmetrica tale che $X(a,b)=0$ implichi $a=b$, ma noi nel seguito intenderemo per spazio metrico semplicemente una categoria $\boldsymbol{R}$-basata e quindi non richiederemo tali condizioni.

Seguendo un suggerimento di LAWVERE [1], si può definire una categoria C con hom-set piccoli come *normata*, quando è assegnata una famiglia di funzioni indiciata dalle coppie ordinate di oggetti di C

$$\hom_C(a,b)\xrightarrow{|\;|_{ab}}\boldsymbol{R}\ (^1)$$

(1) In questo caso, come in altri nel seguito, con $\boldsymbol{R}$ si denota l'insieme degli oggetti della categoria con lo stesso nome.

tale che siano soddisfatte le condizioni

$$|f|_{bb} + |g|_{bc} \geqq |fg|_{bc} \quad \text{e} \quad |1_a|_{aa} = 0 .$$

Omettendo l'indiciatura, che risulterà chiara dal contesto, scriveremo semplicemente $|f| + |g| \geqq |fg|$ e $|1| = 0$.

È di immediata verifica che se la categoria C è particolarizzata a qualche struttura nota la nozione di categoria normata diviene quella abituale.

La nozione di categoria normata può anche essere posta in relazione con la metrica di Hausdorff (cfr. [1]).

Una categoria normata può vedersi come categoria $\mathcal{U}$-basata pur di scegliere opportunamente la categoria $\mathcal{U}$. Nel seguito costruiamo tale categoria, che indicheremo con $\mathcal{S}(\boldsymbol{R})$, e mostriamo come ad una categoria normata si associ mediante un funtore chiuso $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ una categoria $\boldsymbol{R}$-basata, cioè uno spazio metrico, con gli stessi oggetti, indotto dalla norma.

Faremo vedere poi come questo procedimento sia un caso particolare di un altro che ad ogni categoria chiusa $\mathcal{U}$ associa $\mathcal{S}(\mathcal{U})$, in modo tale che una categoria $\mathcal{S}(\mathcal{U})$-basata possa considerarsi una « categoria normata » in senso più generale.

1. – La categoria $\mathcal{S}(\boldsymbol{R})$.

Gli oggetti di $\mathcal{S}(\boldsymbol{R})$ sono famiglie di numeri reali, ossia formalmente coppie (A, f) dove A è un insieme e $f\colon A \to \boldsymbol{R}$. Dati due oggetti (A, f) e (B, g), un morfismo $\alpha\colon (A, f) \to (B, g)$ è una applicazione (che indicheremo ancora con $\alpha\colon A \to B$ tale che

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & B \arrow[d, "g"] \\ \boldsymbol{R} \arrow[r, phantom, "\geqq"] & \boldsymbol{R} \end{tikzcd}$$

La commutatività del quadrato precedente vuol dire che per ogni $a \in A$ si ha $f(a) \geqq g(\alpha(a))$.

Definiamo il prodotto tensoriale di (A, f) e (B, g) nella seguente maniera:

$$(A, f) \otimes (B, g) = (A \times B, f + g)$$

dove $f + g$ è dato dalla composizione $A \times B \xrightarrow{f \times g} \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \xrightarrow{\otimes} \boldsymbol{R}$.

È chiaro dalla definizione che tale prodotto tensoriale è, a meno di isomorfismi coerenti, associativo e simmetrico e ammette come unità l'oggetto $(1, 0)$ dove 1 è l'insieme con un solo elemento e $0(1) = 0 \in \boldsymbol{R}$.

Definiamo poi

$$\hom_{S(\boldsymbol{R})}[(A, f), (B, g)] = (B^A, l)$$

dove, per $\alpha \colon A \to B$ si ha

$$l(\alpha) = \operatorname*{Sup}_{a \in A}[h(\alpha(a)) - f(a)] \text{ (2)}.$$

È di facile verifica il fatto che il funtore $\hom[(A, f), —]$ è aggiunto destro al funtore $(A, f) \otimes —$. Omettiamo questa verifica, come altre del medesimo tipo, in quanto rientra nella dimostrazione generale del § 2.

Si ha ora che ogni categoria normata è $S(\boldsymbol{R})$-basata. Infatti, sia X una categoria normata, poniamo $Y(a, b) = \hom_X(a, b)$, con f_{ab} indichiamo la funzione che ad $h \in Y(a, b)$ assegna $|h|$.

Poniamo $X(a, b) = (Y(a, b), f_{ab})$. Allora $X(a, b)$ è un oggetto di $S(\boldsymbol{R})$. Il morfismo $X(a, b) \otimes X(b, c) \to X(a, c)$ richiesto dalla definizione di categoria $S(\boldsymbol{R})$-basata è definito nella seguente maniera: $X(a, b) \otimes X(b, c) = (Y(a, b) \times Y(b, c), f_{ab} + f_{bc})$, la composizione di morfismi in X fornisce una applicazione fra insiemi $Y(a, b) \times \times Y(b, c) \xrightarrow{\mu_{abc}} Y(a, c)$ la quale è tale che il diagramma seguente commuti

(1)
$$\begin{array}{ccc} Y(a, b) \times Y(b, c) & \xrightarrow{\mu_{abc}} & Y(a, c) \\ {\scriptstyle f_{ab}+f_{bc}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{ac}} \\ \boldsymbol{R} & \geqq & \boldsymbol{R} \end{array}$$

come conseguenza dell'assioma $|f| + |g| \geqq |fg|$.

Analogamente l'identità di $Y(a, a)$ fornisce un'applicazione $1 \xrightarrow{\eta_a} Y(a, a)$ per la quale commuta

(2)
$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow[\eta_a]{} & Y(a, a) \\ {\scriptstyle 0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{aa}} \\ \boldsymbol{R} & \geqq & \boldsymbol{R} \end{array}$$

come conseguenza dell'assioma $0 \geqslant |1|$.

(2) La differenza entro parentesi è quella troncata che definisce il bifuntore hom in $\boldsymbol{R}$ (cfr. introduzione).

Viceversa una qualsiasi categoria $\mathcal{S}(\boldsymbol{R})$-basata diviene una categoria in senso ordinario ($\mathcal{S}$-basata) ponendo $\hom_X(a, b) = Y(a, b)$ $\big($ove $(Y(a, b), f_{ab}) = X(a, b)\big)$ e usando i morfismi μ_{abc}, η_a canonici per definire la composizione e l'identità.

La funzione f_{ab} fornisce la norma per ogni $h \in Y(a, b)$ e la commutatività dei quadrati (1) e (2) garantisce la validità degli assiomi per la norma.

Date due categorie chiuse $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$, ricordiamo che un *funtore chiuso* [2] è una terna consistente di un funtore $\phi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un $\mathcal{V}$-morfismo $\varphi_0\colon k_v \to \phi(k_u)$ e una trasformazione naturale $(\phi \times \phi) \cdot \underset{\mathcal{V}}{\otimes} \dashrightarrow \underset{\mathcal{U}}{\otimes} \cdot \phi$ le cui componenti $\varphi_{uv}\colon \phi(u) \underset{\mathcal{V}}{\otimes} \phi(v) \to \phi(u \underset{\mathcal{U}}{\otimes} v)$ sono compatibili con gli isomorfismi di associatività, simmetria e unità in $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$.

Se X è una categoria $\mathcal{U}$-basata, un funtore chiuso $\phi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ rende X una categoria $\mathcal{V}$-basata con gli stessi oggetti, pur di porre $X'(a, b) = \phi(X(a, b))$.

Nel nostro caso è possibile definire il funtore

$$\inf\colon \mathcal{S}(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$$

sugli oggetti con la legge $(A, f) \mapsto \inf\limits_{a \in A} f(a)$.

È di immediata verifica il fattore che se $\alpha\colon (A, f) \to (B, g)$ è un morfismo di $\mathcal{S}(\boldsymbol{R})$, si ha $\inf\limits_{a \in A} f(a) \geqslant \inf\limits_{b \in B} g(b)$ e che quindi il funtore rimane definito anche sui morfismi.

Si verifica poi facilmente che inf è un funtore chiuso, per il quale i morfismi di $\boldsymbol{R}$: $k_{\boldsymbol{R}} \to \inf(k_{\mathcal{S}(\boldsymbol{R})})$ e

$$\inf(A, f) \underset{\boldsymbol{R}}{\otimes} \inf(B, g) \to [(A, f) \underset{\mathcal{S}(\boldsymbol{R})}{\otimes} (B, g)]$$

sono dati rispettivamente da $0 \geqq \inf 0$ e

$$\inf f(a) + \inf g(b) \geqq \inf[f(a) + g(b)] .$$

Allora $\inf\colon \mathcal{S}(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ associa ad ogni categoria $\mathcal{S}(\boldsymbol{R})$-basata una categoria $\boldsymbol{R}$-basata, cioè induce una metrica della norma.

Osserviamo che il funtore dimenticante $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}) \to \mathcal{S}$ che associa ad ogni oggetto di $\mathcal{S}(\boldsymbol{R})$ l'insieme indiciante, ammette un aggiunto destro F ed un aggiunto sinistro G definiti sugli oggetti rispettivamente da $F(B) = (B, \infty)$ e $G(B) = (B, 0)$.

2. – Categorie $\mathcal{S}(\mathcal{U})$-basate.

Quanto fatto per le categorie $\mathcal{S}(\boldsymbol{R})$-basate si può ripetere più in generale a partire da una qualsiasi categoria chiusa $\mathcal{U}$.

$\mathcal{S}(\mathcal{U})$ avrà per oggetti le coppie (A, f) dove A è un insieme pensato come categoria discreta e $f\colon A \to \mathcal{U}$ è un funtore. Un morfismo $(A, f) \to (B, g)$ in $\mathcal{S}(\mathcal{U})$ è una coppia (α, τ) dove $\alpha\colon A \to B$ e τ è una trasformazione naturale $f \xrightarrow{\cdot} \alpha g$.

Indicheremo col diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\curvearrowright}"] & B \arrow[dl, "g"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$

il fatto che τ è una trasformazione naturale $f \xrightarrow{\cdot} \alpha g$.

Il bifuntore $\otimes\colon \mathcal{S}(\mathcal{U}) \times \mathcal{S}(\mathcal{U}) \to \mathcal{S}(\mathcal{U})$ è definito da

$$(A, f) \otimes (B, g) = (A \times B, f \otimes g)$$

dove $f \otimes g$ è la composizione $A \times B \xrightarrow{f \times g} \mathcal{U} \times \mathcal{U} \xrightarrow{\otimes} \mathcal{U}$.

Il bifuntore hom: $\mathcal{S}(\mathcal{U})^{op} \times \mathcal{S}(\mathcal{U}) \to \mathcal{S}(\mathcal{U})$ è definito da

$$\hom[(A, f), (B, g)] = (B^A, l)$$

dove, per $\alpha\colon A \to B$, si ha $l(\alpha) = \prod_{a \in A} \hom_{\mathcal{U}}[f(a), g(\alpha(a))]$, avendo indicato con $\prod$ il prodotto in $\mathcal{U}$.

Entrambi questi bifuntori si estendono poi in maniera naturale ai morfismi.

Dimostriamo ora che $\hom_{\mathcal{S}(\mathcal{U})}[(A, f), -]$ è aggiunto a destra al funtore $(A, f) \otimes -$.

Dato il morfismo di $\mathcal{S}(\mathcal{U})$: $(A, f) \otimes (B, g) \xrightarrow{(\alpha, \tau)} (C, h)$

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "f \otimes g"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\curvearrowright}"] & C \arrow[dl, "h"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$

ad $\alpha\colon A \times B \to C$ associamo $\hat{\alpha}\colon B \to C^A$ con $\hat{\alpha}(b) = \alpha_b$, dove $\alpha_b(a) =$

$= \alpha(a, b)$. Ad ogi componente τ_{ab} della trasformazione naturale τ associamo il morfismo $\hat{\tau}_{ab}$ ottenuto dall'aggiunzione

$$\frac{\tau_{ab}\colon f(a) \otimes g(b) \to h(\alpha(a, b))}{\hat{\tau}_{ab}\colon g(b) \to \hom_{\mathfrak{U}}[f(a), h(\alpha(a, b))]}$$

in $\mathfrak{U}$.

Poniamo $\hat{\tau}_b = \prod_{a \in A} \hat{\tau}_{ab}$ e $\hat{\tau}\colon B \to \mathfrak{U}$ sia la trasformazione naturale le cui componenti sono $\hat{\tau}_b$.

$(\hat{\alpha}, \hat{\tau})$ così ottenuto è un morfismo di $\mathcal{S}(\mathfrak{U})\colon (H, g) \to (C^A, c) = \hom_{\mathcal{S}(\mathfrak{U})}[(A, f), (C, h)]$, cioè per ogni $b \in B$, $\hat{\tau}_b$ è un morfismo $g(b) \to l(\hat{\alpha}(b))$ in $\mathfrak{U}$. Si ha infatti:

$$l(\alpha(b)) = \prod_{a \in A} \hom[f(a), h(\alpha_b(a))] = \prod_{a \in A} \hom[f(a), h(\alpha(a, b))]$$

e quindi

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\hat{\alpha}"] \arrow[dr, "g"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\hat{\tau}}{\curvearrowright}"] & C^A \arrow[dl, "l"] \\ & \mathfrak{U} & \end{tikzcd}$$

Viceversa, invertendo tutto il procedimento, si ha la richiesta corrispondenza biunivoca

$$\frac{A(f, f) \otimes (B, g) \to (C, h)}{(B, g) \to \hom[(A, f), (C, h)]}.$$

La naturalità di questa corrispondenza biunivoca è conseguenza del fatto che le categorie A, B e C indicianti sono discrete.

In conformità con quanto fatto in precedenza è ora possibile definire un funtore chiuso $\sum\colon \mathcal{S}(\mathfrak{U}) \to \mathfrak{U}$ assegnandolo sugli oggetti per mezzo di $(A, f) \mapsto \sum_{a \in A} f(a)$, dove $\sum$ è il coprodotto in $\mathfrak{U}$; se $(A, f) \xrightarrow{(\alpha, \tau)} (B, g)$ è un morfismo di $\mathcal{S}(\mathfrak{U})$ la proprietà universale del coprodotto permette di definire $\sum(\alpha, \tau)$ (si veda il diagramma seguente nel quale le frecce i indicano le inclusioni nei coprodotti che compaiono).

$$\begin{tikzcd} f(a) \arrow[r, "\tau_a"] \arrow[d, "i_{f(a)}"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & g(\alpha(a)) \arrow[d, "i_{g(\alpha(a))}"] \\ \Sigma f(a) \arrow[r, "\Sigma(\alpha,\tau)"] & \Sigma g(b) \end{tikzcd}$$

Poichè $\sum(k_{\mathcal{S}(\mathcal{U})}) = k_{\mathcal{U}}$ si ha che $\varphi_0 \colon k \to \sum(k_{\mathcal{S}(\mathcal{U})})$ è l'identità di $k_{\mathcal{U}}$ e la trasformazione naturale le cui componenti sono φ_{ab} si ottiene dal diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
f(a) \otimes g(b) \arrow[rr, "i_{f(a)} \otimes i_{g(b)}"'] \arrow[dr, "i_{f(a)\otimes g(b)}"'] & & \Sigma f(a) \otimes \Sigma g(b) \\
& \Sigma(f(a) \otimes g(b)) \arrow[ur, "\varphi_{ab}"'] &
\end{tikzcd}$$

Rimane così dimostrato che $(\sum, \varphi_0, \varphi) \colon \mathcal{S}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}$ è un funtore chiuso.

È ora naturale definire le *categorie* $\mathcal{U}$-*normate* come quelle basate su $\mathcal{S}(\mathcal{U})$; se C è $\mathcal{S}(\mathcal{U})$-basata il morfismo canonico $C(a, b) \otimes C(b, c) \to$ $\to C(a, c)$ sarà dato dalla coppia (μ_{abc}, τ_{abc}) con

$$\begin{tikzcd}
A(a, b) \times A(b, c) \arrow[rr, "\mu_{abc}"'] \arrow[dr, "f_{ab}\otimes f_{bc}"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\tau_{abc}}{\curvearrowright}"] & A(a, c) \arrow[dl] \\
& \mathcal{U} &
\end{tikzcd}$$

avendo posto $C(a, b) = (A(a, b), f_{ab})$.

C è una categoria in senso ordinario ponendo $\hom_C(a, b) =$ $= A(a, b)$ e prendendo μ_{abc} come composizione. Le funzioni f_{ab} possono considerarsi come funzioni $|\ |_{ab}$ che assegnano ad ogni elemento di $A(a, b)$ la sua « norma in $\mathcal{U}$ », con la proprietà:

$$|f|_{ab} \underset{\mathcal{U}}{\otimes} |g|_{bc} \xrightarrow[\tau_{abc}]{} |fg|_{ac} .$$

Analogamente per l'identità:

$$k_{\mathcal{U}} \xrightarrow[\tau_{aa}]{} |1_a|_{aa} .$$

Ad esempio una categoria 2-normata, dove 2 è la categoria dei valori di verità (cfr. [1]), non è altro che una categoria nella quale ad ogni morfismo è associato un valore di verità, in modo che la composizione di due morfimi « veri » sia un morfimo « vero ».

Anche nel caso generale il funtore dimenticante $\mathcal{S}(\mathcal{U}) \to \mathcal{S}$ che associa ad ogni oggetto di $\mathcal{S}(\mathcal{U})$ l'insieme indiciante ammette un aggiunto sinistro e uno destro; questi sono definiti da $F(S) = (S, \gamma)$ e $G(S) = (S, \varrho)$, dove γ e ϱ sono le applicazioni costanti che mandano S rispettivamente nell'oggetto terminale e in quello iniziale di $\mathcal{U}$.

I funtori F e G si possono considerare come i casi banali $\mathcal{U}$-norma assegnabile a una categoria qualsiasi.

3. – I funtori dimenticanti di $\mathcal{S}(\mathcal{U})$.

Nel § 2 abbiamo visto il funtore $\mathcal{S}(\mathcal{U}) \to \mathcal{S}$ definito sugli oggetti dalla legge $(A, f) \mapsto A$. Una categoria chiusa $\mathcal{U}$, localmente piccola, ammette sempre un altro funtore chiuso $V\colon \mathcal{U} \to \mathcal{S}$ definito nella maniera seguente: $V(u) = \hom_{\mathcal{U}}(k, u)$, $v_0\colon 1 \to V(k)$ è dato dalla identità 1_k e la trasformazione naturale $v_{uv}\colon V(u) \times V(v) \to V(u \otimes v)$ è l'applicazione che porta la coppia $f_1\colon k \to u$, $f_2\colon k \to v$ nella composizione $k \xrightarrow{\cong} k \otimes k \xrightarrow{f_1 \otimes f_2} u \otimes v$.

Per le categorie $\mathcal{S}(\mathcal{U})$, oltre a questo funtore V, esiste un altro funtore canonico chiuso: quello ottenuto dalla composizione

$$\mathcal{S}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\Sigma} \mathcal{U} \xrightarrow{V} \mathcal{S} .$$

Esiste inoltre una trasformazione naturale $\tau\colon V_{\mathcal{S}(\mathcal{U})} \overset{\cdot}{\to} \sum V_{\mathcal{U}}$ le cui componenti

$$\tau_{(A,f)}\colon \hom_{\mathcal{S}(\mathcal{U})}[(1, 0), (A, f)] = V_{\mathcal{S}(\mathcal{U})}(A, f) \to$$
$$\to \hom_{\mathcal{U}}[k, \textstyle\sum f(a)] = V_{\mathcal{U}}(A, f)$$

sono definite nel modo seguente: un elemento di $V_{\mathcal{S}(\mathcal{U})}(A, f)$ è una coppia (α, g) con

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "k"'] & & A \arrow[dl, "f"] \\ & \mathcal{U} \arrow[u, phantom, "\overset{\sigma}{\curvearrowright}"] & \end{tikzcd}$$

vale a dire una coppia $(a, k \xrightarrow{\sigma} f(a))$.

L'inclusione nel coprodotto $f(a) \to \sum f(a)$ permette di associare a questo elemento una freccia $k \to f(a) \to f(a)$, cioè un elemento di $V_{\mathcal{U}}(A, f)$.

Si verifica facilmente la naturalità. Inoltre τ è una *trasformazione naturale chiusa* nel senso della definizione seguente (cfr. [2]).

Siano $(\phi, \varphi_0, \varphi_{uv})$ e $(\psi, \psi_0, \psi_{uv})$ due funtori chiusi $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$. Una trasformazione naturale τ è detta chiusa se essa verifica ulteriormente la commutatività dei diagrammi seguenti:

$$
\begin{tikzcd}
 & \phi(k\mathfrak{V}) \arrow[dd, "\tau_{k\mathfrak{V}}"] \\
k\mathfrak{W} \arrow[ur, "\varphi_0"] \arrow[dr, "\psi_0"'] & \\
 & \psi(k\mathfrak{V})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\phi(u) \underset{\mathfrak{W}}{\otimes} \phi(v) \arrow[r, "\varphi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}"] \arrow[d, "\tau_{\mathfrak{U}} \otimes \tau_{\mathfrak{V}}"] & \phi(u \underset{\mathfrak{V}}{\otimes} v) \arrow[d, "\tau_{\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V}}"] \\
\psi(u) \underset{\mathfrak{W}}{\otimes} \psi(v) \arrow[r, "\psi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}"'] & \psi(u \underset{\mathfrak{V}}{\otimes} v)
\end{tikzcd}
$$

BIBLIOGRAFIA

[1] F. W. Lawvere, *Metric spaces, generalized logic and closed categories*, in corso di stampa su Rend. Sem. Mat. Fis. Milano.

[2] S. Eilenberg - G. M. Kelly, *Closed categories*, Proceedings of La Jolla Conference on Categorical Algebra, Springer, 1966.

[3] J. Bénabou, *Categories avec multiplication*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **256** (1963), pp. 1887-1890.

[4] J. Bénabou, *Categories relatives*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **260** (1965), pp. 3824-3826.

[5] S. MacLane, *Natural associativity and commutativity*, Rice Univ. Studies, **49** (1963), pp. 28-46.

[6] G. M. Kelly, *Tensor product in categories*, J. Algebra, **2** (1965), pp. 15-37.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 17 luglio 1974